

เฉลยโจทย์ ม.ปลาย
เพื่อเตรียมสอบ GAT-PAT พ.ย.57
วิชา PAT 1 : คณิตศาสตร์
ชุดที่ 1 (ตอนที่ 2/7)

โดยช่วงตั้งแต่ 7 ต.ค. - 20 พ.ย. 57 ท่านสามารถติดตามได้ดังนี้
 วันอังคารดูวิชา GAT, วันพุธดูวิชา PAT1, วันพฤหัสบดีดูวิชา PAT2

เดลินิวส์

ร่วมกับ



นักเรียน บุรณทราน

1. กำหนดให้ ไฮเพอร์โบลารูปหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (3, -1) แกนสังยุคขนาน

แกน y ยาว 4 หน่วย และผ่านจุด $(-2, \frac{5}{3})$ แล้วจุดยอดจุดหนึ่งของ

ไฮเพอร์โบลานี้ตรงกับจุดยอดของพาราโบลาในข้อใด

- 1) $y^2 - 2y - 4x + 25 = 0$ 2) $y^2 - 2y - 4x + 1 = 0$
 3) $x^2 - 12x - 4y + 40 = 0$ 4) $x^2 - 4y - 4 = 0$

2. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8+2^x}{8-2^x}$

- 1) -1 2) 0 3) 1 4) 2

3. นิยาม $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$

เมื่อ A_i เป็นเซตใดๆ และ n เป็นจำนวนนับ ข้อใดต่อไปนี้ผิด

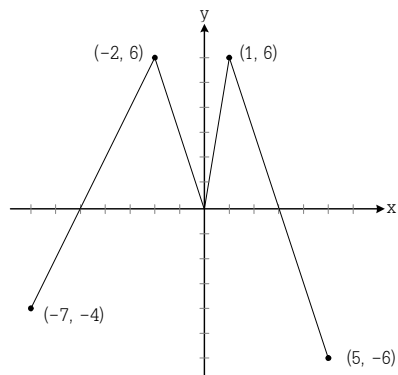
- 1) $\bigcup_{i=1}^n [1, i] = [1, n]$ 2) $\bigcup_{i=1}^n [i, i+1] = [1, n+1]$
 3) $\bigcap_{i=1}^n [0, i] = \{0\}$ 4) $\bigcap_{i=1}^n (i, i+1) = \emptyset$

4. สมการ $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x+1)^2} + \frac{d}{(x+2)} = 0$ มี 2 - 3i, 1 + i

เป็นราก โดย a, b, c, d เป็นจำนวนจริง จงหาค่าของ a + 2b - c + d

- 1) 6 2) 3 3) 1 4) -1

5. ถ้ากราฟของฟังก์ชัน f แสดงในรูปข้างล่าง แล้วสมการ $f(f(x)) = 6$ มีกี่คำตอบ



- 1) 2 2) 4 3) 5 4) 6

6. มีจำนวนเต็มบวกทั้งหมดกี่จำนวนที่มีค่าไม่เกิน 2001 และเป็นพหุคูณของ 3 หรือ 4 แต่ไม่ใช่พหุคูณของ 5

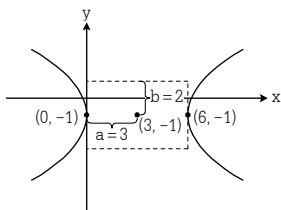
- 1) 768 2) 801 3) 934 4) 1067

7. กล้องใบหนึ่งมีสลักจำนวน 2n ใบ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และเขียนหมายเลขกำกับไว้ไม่ซ้ำกันจาก 1 ถึง 2n ถ้าสุ่มหยิบสลักมา 2 ใบพร้อมๆ กัน ความน่าจะเป็นที่จะได้ใบหนึ่งหมายเลข n และอีกใบเป็นจำนวนที่มากกว่า n เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{n-1}{2n}$ 3) $\frac{n-1}{n(2n-1)}$ 4) $\frac{1}{2n-1}$

เฉลย

1. เฉลย 4) $x^2 - 4y - 4 = 0$
 วาดรูปตามโจทย์



จะได้สมการอยู่ในรูป $\frac{(x-3)^2}{a^2} - \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1$

กราฟผ่านจุด $(-2, \frac{5}{3})$ จะได้ $\frac{(-2-3)^2}{a^2} - \frac{(\frac{5}{3}+1)^2}{b^2} = 1$

$$\frac{25}{a^2} - \frac{8^2}{3^2 \cdot 2^2} = 1$$

$$\frac{25}{a^2} = \frac{3^2 \cdot 2^2 + 8^2}{3^2 \cdot 2^2}$$

$$\therefore a^2 = \frac{25 \times 36}{100} = 3^2$$

\therefore สมการไฮเพอร์โบลาคือ $\frac{(x-3)^2}{3^2} - \frac{(y+1)^2}{2^2} = 1$

จะได้จุดยอดของไฮเพอร์โบลาคือ $(3 \pm 3, -1) = (6, -1), (0, -1)$

จัดรูปตัวเลือก 4) ได้เป็น $x^2 = 4y + 4$
 $(x-0)^2 = 4(y+1)$

จะได้จุดยอดของพาราโบลา คือ (0, -1) ซึ่งตรงกับในไฮเพอร์โบลาคือ

2. เฉลย 1) -1

หารทั้งเศษและส่วนของฟังก์ชันด้วย 2^x

$$\frac{8+2^x}{8-2^x} = \frac{\frac{1}{2^x}(8+2^x)}{\frac{1}{2^x}(8-2^x)} = \frac{8 \cdot 2^{-x} + 1}{8 \cdot 2^{-x} - 1}$$

เมื่อ $x \rightarrow \infty$ จะได้ $2^{-x} \rightarrow 0$ และ $8 \cdot 2^{-x} \rightarrow 0$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8+2^x}{8-2^x} = \frac{1}{-1} = -1$$

3. เฉลย 3) $\bigcap_{i=1}^n [0, i] = \{0\}$

1) ถูก เพราะ $\bigcup_{i=1}^n [1, i] = \{1\} \cup [1, 2] \cup \dots \cup [1, n] = [1, n]$

2) ถูก เพราะ $\bigcup_{i=1}^n [i, i+1] = [1, 2] \cup [2, 3] \cup \dots \cup [n, n+1] = [1, n+1]$

3) ผิด เพราะ $\bigcap_{i=1}^n [0, i] = [0, 1] \cap [0, 2] \cap \dots \cap [0, n] = [0, 1]$

4) ถูก เพราะ $\bigcap_{i=1}^n (i, i+1) = (1, 2) \cap (2, 3) \cap \dots \cap (n, n+1) = \emptyset$

4. เฉลย 1) 6

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x+1)^2} + \frac{d}{(x+2)} = 0$$

จะได้ $a(x-2)(x+1)^2(x+2) + b(x-1)(x+1)^2(x+2) + c(x-1)(x-2)(x+2) + d(x-1)(x-2)(x+1)^2 = 0$

ซึ่งมีรากคือ (2 - 3i) และ (1 + i) $\therefore a, b, c, d \in \mathbb{R}$

ดังนั้น (2 + 3i) และ (1 - i) เป็นรากของสมการด้วย

$$\therefore a(x-2)(x+1)^2(x+2) + b(x-1)(x+1)^2(x+2) + c(x-1)(x-2)(x+2) + d(x-1)(x-2)(x+1)^2 = 0$$

$$= (x-2-3i)(x-2+3i)(x-1-i)(x-1+i)$$

$$= (x^2 - 4x + 13)(x^2 - 2x + 2) \dots \dots \dots (*)$$

แทนค่า $x = 1$ ใน (*) จะได้ $-12a = 10 \therefore a = -\frac{5}{6}$

แทนค่า $x = 2$ ใน (*) จะได้ $36b = 18 \therefore b = \frac{1}{2}$

แทนค่า $x = -1$ ใน (*) จะได้ $6c = 90 \therefore c = 15$

แทนค่า $x = -2$ ใน (*) จะได้ $12d = 250 \therefore d = \frac{125}{6}$

$$\therefore a + 2b - c + d = -\frac{5}{6} + 2 \cdot \frac{1}{2} - 15 + \frac{125}{6} = 6$$

5. เฉลย 4) 6

จาก $f(f(x)) = 6$ จะได้ว่า $f(x) = -2$ หรือ $f(x) = 1$

เส้นแนวนอน $y = f(x) = -2$ ตัดกราฟของ f สองครั้ง

ดังนั้น $f(x) = -2$ มี 2 คำตอบ

ทำนองเดียวกัน $f(x) = 1$ มี 4 คำตอบ

ดังนั้น $f(f(x)) = 6$ มี 2 + 4 = 6 คำตอบ

6. เฉลย 2) 801

ในจำนวนเต็มบวกที่ไม่เกิน 2001

$$\text{มี } \left\lfloor \frac{2001}{3} \right\rfloor = 667 \text{ จำนวนที่เป็นพหุคูณของ 3}$$

$$\text{มี } \left\lfloor \frac{2001}{4} \right\rfloor = 500 \text{ จำนวนที่เป็นพหุคูณของ 4}$$

จำนวนที่เป็นทั้งพหุคูณของ 3 และ 4 (ซึ่งก็คือพหุคูณของ 12)

$$\text{มี } \left\lfloor \frac{2001}{12} \right\rfloor = 166 \text{ จำนวน}$$

ดังนั้น ในจำนวนเต็มบวกที่ไม่เกิน 2001 มีพหุคูณของ 3 หรือ 4 ทั้งหมด

$$667 + 500 - 166 = 1001 \text{ จำนวน}$$

ใน 2001 จำนวนนี้มีพหุคูณของ 5 ซึ่งต้องเป็นพหุคูณของ 15 หรือ 20 อยู่ทั้งหมด

$$\left\lfloor \frac{2001}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2001}{20} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2001}{60} \right\rfloor = 133 + 100 - 33 = 200 \text{ จำนวน}$$

ดังนั้น ในจำนวนเต็มบวกที่ไม่เกิน 2001 มีพหุคูณของ 3 หรือ 4 แต่ไม่ใช่พหุคูณของ 5 ทั้งหมด

$$1001 - 200 = 801 \text{ จำนวน}$$

หมายเหตุ : $[x] =$ จำนวนเต็มมากที่สุดซึ่งน้อยกว่าหรือเท่ากับ x

7. เฉลย 4) $\frac{1}{2n-1}$

จากโจทย์จะได้ $n(S) = \binom{2n}{2} = n(2n-1)$ วิธี

$$n(E) = (1) \cdot (n) = n \text{ วิธี}$$

ได้หมายเลข n

ได้หมายเลขมากกว่า n คือจำนวนตั้งแต่ n + 1, n + 2, n + 3, ..., n + n

$$\text{ดังนั้น ความน่าจะเป็น} = \frac{n}{n(2n-1)} = \frac{1}{2n-1}$$

นักเรียนสามารถเข้าไปดูข้อมูลย้อนหลังได้ที่